Теория 1. Формулировка и смысл теоремы Андронова-Понтрягина.

студентка 2 курса магистратуры Кобзева В.М.

21 декабря 2020 г.

Грубость, или структурная устойчивость — важнейшее условие корректности задания модели, а корректность задание - важнейшее требование к математической модели.

Основная идея: достаточно малые изменения грубой системы должны приводить к соответственно малым изменениям в динамике ее поведения.

Только грубые системы могут описывать реальные процессы. Поэтому **теорема Андронова-Понтрягина имеет важное значение для поиска состояний равновесия системы**.

Рассмотрим множество двумерных систем на плоскости, заданных уравнением $x' = X(x)$, где $X(x_1, x_2)$ – $\mathbb{C}^r$-гладкая (непрерывно - дифференцируемая до порядка r) функция ($r \geq 1$), определенная в замкнутой и ограниченной области $G \subset \mathbb{R}^2$

Множество называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки.

Область называется ограниченной, если существует круг на плоскости или шар в пространстве, содержащий данную область.

Замкнутая, ограниченная область называется компактом.

Введем на этом множестве следующую норму:

$$||X||_{\mathbb{C}^1} = \sup_{x \in G} \left(||X|| + \left|\left| \frac{\partial X}{\partial x} \right|\right| \right).$$

В данной норме множество систем становится банаховым пространством, которое мы обозначаем B или B_G. Банахово пространство — нормированное векторное пространство, полное по метрике, порождённой нормой.

Полное метрическое пространство — метрическое пространство, в котором каждая фундаментальная последовательность сходится (к элементу этого же пространства).

Также определим δ-окрестность системы X как множество всех систем $\widetilde{X}$, удовлетворяющих условию $||\widetilde{X} - X||_{\mathbb{C}^1} < \delta$.

Определение

Динамическая система X называется **грубой в области** G, если
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 :$

1. все системы в δ-окрестности системы X топологически эквивалентны X;
2. гомеоморфизм, который устанавливает эту эквивалентность, является ε-близким к тождественному (то есть расстояние между двумя соответствующими точками меньше, чем ε).

Естественно наложить некоторые ограничения, касающиеся границы ∂G области G, как это было сделано в исходном определении грубости, а именно: ∂G должна быть гладкой замкнутой кривой, не касательной к векторному полю (кривой без контакта).

Заметим, что в случае динамических систем на компактных гладких поверхностях область G совпадает со всей поверхностью таким образом, каких-либо граничных условий не возникает.

Теорема Андронова-Понтрягина

Система X является грубой в плоской области G тогда и только тогда, когда

1. не существует состояний равновесия с характеристическим показателем на мнимой оси;
2. не существует периодических орбит с мультипликатором на единичной окружности;
3. не существует сепаратрис, идущих из седла в другое (или то же самое) седло.

Характеристический показатель (Ляпунова) функции $d(t)$ — действительное число, определяемое соотношением $\lambda = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{t} ln|\frac{d(t)}{d_0}|$. Это величина, характеризующая скорость удаления друг от друга траекторий. Положительность показателя Ляпунова обычно свидетельствует о хаотическом поведении системы.

Состояния равновесия – узлы, фокусы, седла (положение "центр"достигается как раз при чисто мнимом показателе).

Мультипликатор периодической точки – в теории динамических систем, собственное значение дифференциала отображения за период в этой точке.

Последнее условие может быть переформулировано как отсутствие гомоклинических и гетероклинических траекторий.

Гомоклинические траектории — траектории, которые выходят и приходят в одно и то же положение равновесия.

Гетероциклические — которые выходят из одного положения равновесия и приходят в другое.

Сепаратрисы седла — кривые, которые в точке покоя касаются прямых-ассимптот.

Из приведенной выше теоремы следует, что грубая система на плоскости может обладать только грубыми состояниями равновесия (узлами, фокусами и седлами) и грубыми предельными циклами. Что касается сепаратрис седел, они либо асимптотически стремятся к узлу, фокусу или предельному циклу, или покидают область G за конечный отрезок времени.

Очевидно, что эта картина сохраняется при малых гладких возмущениях. Поэтому грубые системы образуют открытое подмножество в пространстве B_G.

Более того, из представленных ниже простых соображений, основанных на повороте векторного поля, следует, что если X не является грубой системой, то для любых $\delta > 0$ существует грубая система, которая δ-близка к X. Другими словами, грубые системы образуют плотное множество в B_G.

Из теоремы Андронова–Понтрягина непосредственно следует, что грубая система может обладать только конечным числом состояний равновесия и периодических орбит в G.

Необходимость условий (1) и (2) теоремы Андронова–Понтрягина очевидна. Действительно, если система грубая в G, она должна оставаться грубой и в любой подобласти G. Поэтому, выбрав малую окрестность состояния равновесия, заключаем, что система в окрестности этого состояния равновесия также должна быть грубой. Аналогичное наблюдение верно и для грубых предельных циклов.